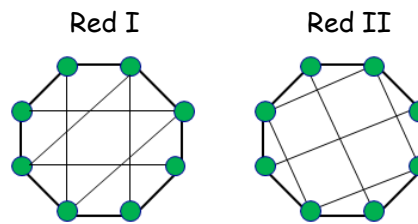


## MATEMÁTICA DISCRETA II

### Ejercicio 1 (6 ptos.)

Un departamento de una empresa tiene establecidas dos redes locales de comunicación entre sus terminales cuyas líneas de conexión están esquematizadas en los siguientes grafos:



Analiza si los grafos que representan las redes I y II son a) bipartidos b) isomorfos.

#### Solución

- a) El grafo de la Red I es bipartido y el grafo de la Red II no es bipartido porque tiene 3 - ciclos.  
 b) Los grafos no son isomorfos, según el apartado anterior.

### Ejercicio 2 (8 ptos.)

- a) Sean  $G = (V, A)$  un grafo simple con  $2m$  vértices y  $M$  la matriz de adyacencia de  $G$ .  
 Si  $G$  es conexo y la suma de las entradas de  $M$  es  $2m-2$ , ¿ $G$  es un árbol?, ¿ $G$  tiene ciclos?  
 b) Un árbol tiene 242 vértices y el mismo número de vértices de los grados 2, 3, 4 y 5. No tiene vértices de grado superior. ¿Cuál es el nº de hojas de  $T$ ?  
 c) Si  $T$  es un bosque con  $n = 150$  vértices y  $q = 145$  aristas, ¿cuántas componentes conexas tiene?

#### Solución

- a)  $G$  es árbol si y sólo si  $G$  es conexo y  $\text{card } A = \text{card } V - 1 = 2m - 1$   
 Si  $G$  es conexo y la suma de las entradas de  $M$  es  $2m - 2$ , entonces

$$2 \text{ card } A = \sum_{i=1}^n \delta(v_i, v_j) = 2m - 2 \Rightarrow \text{card } A = m - 1 \Rightarrow G \text{ no es árbol}$$

Si  $G$  es conexo y  $G$  no es un árbol, entonces  $G$  tiene al menos un ciclo.

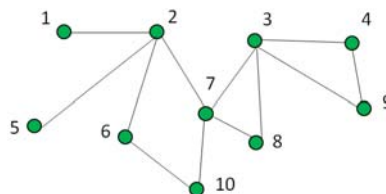
- b) Sean  $x$  el número de hojas de  $T$  e  $y$  el número de vértices de cada uno de los grados 2, 3, 4 y 5, entonces

$$\sum_{i=1}^n \delta(v) = 2q = 2(n - 1) \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 482 \\ x + 4y = 242 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 24 \text{ vértices de grados 2, 3, 4 y 5} \\ x = 146 \text{ hojas} \end{cases}$$

- c) Sea  $k$  el nº de componentes conexas de  $T$ , entonces  $q = n - k \Rightarrow 145 = 150 - k \Rightarrow k = 5$

### Ejercicio 3 (7 ptos.)

- a) Define vértice-corte y bloque en un grafo.  
 b) Indica los vértices-corte y los bloques del grafo de la figura.



- c) Halla un contraejemplo para la siguiente afirmación:  
 Si todos los vértices de  $G$  son impares entonces  $G$  no contiene vértices-corte.

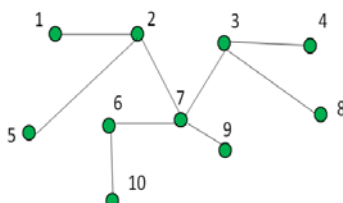
#### Solución

- b) Vértices-corte =  $\{2, 3, 7\}$ , Bloques =  $\{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 9\}, \{3, 7, 8\}, \{2, 6, 7, 10\}\}$

c)  $K_{1,3}$  tiene un vértice-corte y todos los vértices de  $G$  son impares.

#### Ejercicio 4 (8 ptos.)

a) Halla el código de Prüfer del árbol siguiente:



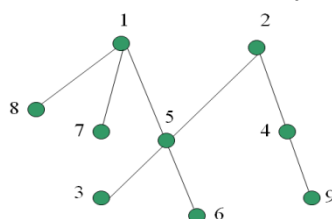
b) Construye el árbol cuyo código de Prüfer es  $C = [5, 5, 1, 1, 5, 2, 4]$ .

c) ¿Cuántos árboles generadores tiene el grafo completo  $K_n$ ?

#### Solución

a) El código de Prüfer es  $C = [2, 3, 2, 7, 3, 7, 7, 6]$ .

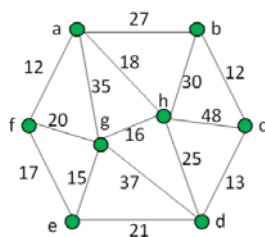
b) Las aristas del árbol son:  $A = \{53, 56, 17, 18, 51, 25, 42, 49\}$



c) El grafo completo  $K_n$  tiene  $n^{n-2}$  árboles generadores.

#### Ejercicio 5 (6 ptos.)

a) En el grafo de la figura aparece el mapa de carreteras de Muchagua, región en la que se han producido unas graves inundaciones que han cortado todas las carreteras. La etiqueta de cada tramo indica el número de horas de trabajo que son necesarias para dejar apto para la circulación ese tramo. Los recursos disponibles son limitados por lo que se decide trabajar sólo en los tramos que garanticen la comunicación entre todas las poblaciones. ¿Qué algoritmos seguirías para minimizar el número total de horas trabajadas? ¿Cuántas horas se necesitan como mínimo?



b) La duración estimada del viaje directo entre cada dos de los pueblos viene dada por la tabla adjunta. ¿En qué pueblos podría situarse un centro de emergencias de forma que la duración del viaje entre el centro y cualquier otro pueblo sea lo más corta posible?

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		3	4	5	6	3	4	2
b	3		5	5	9	6	5	2
c	4	5		1	5	4	2	2
d	5	5	1		4	3	1	4
e	6	9	5	4		3	5	8
f	3	6	4	3	3		2	5
g	4	5	2	1	5	2		3
h	2	2	2	4	8	5	3	

**MATEMÁTICA DISCRETA II****Solución**

- a) Aplicando el algoritmo de Prim, hay que renovar los tramos  $A = \{af, fe, eg, gh, ed, dc, cb\}$ .  
El coste total mínimo es de 106 h.

S	a	f	e	g	h	d	c	b
V-S	a	b	c	d	e	f	g	h
		27	$\infty$	$\infty$	$\infty$	12	35	18
		27	$\infty$	$\infty$	17		20	18
		27	$\infty$	21			15	18
		27	$\infty$	21				16
		27	48	21				
		27	13					
		12						

- b)  $V = [a, b, c, d, e, f, g, h]$ ,  $E(G) = [6, 9, 5, 5, 9, 6, 5, 8]$ , Centro =  $\{c, d, g\}$